



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**

**AN ȘCOLAR 2025 – 2026**

**ETAPA LOCALĂ**

**07.02.2026**

**CLASA A V – A**

**BAREM**

**Subiectul I (22,5 puncte)**

Comparați numerele naturale  $a$  și  $b$ , unde  $a = (4^{10} - 4^9) \cdot (4^9 - 4^8) \cdot (4^8 - 4^7) \cdot \dots \cdot (4^2 - 4^1)$  și  $b = 3 \cdot 2^{90} \cdot 81^2$ .

**Soluție**

S1	<p>Calculăm valoarea din fiecare paranteză dând factor comun puterea mai mică a lui 4:</p> $(4^{10} - 4^9) = 4^9 \cdot (4 - 1) = 3 \cdot 4^9$ $(4^9 - 4^8) = 4^8 \cdot (4 - 1) = 3 \cdot 4^8 \dots$ $(4^2 - 4^1) = 4^1 \cdot (4 - 1) = 3 \cdot 4^1$ <p>Înlocuim acești termeni în expresia lui <math>a</math>: <math>a = (3 \cdot 4^9) \cdot (3 \cdot 4^8) \cdot \dots \cdot (3 \cdot 4^1)</math></p>	5 p
	<p>Sunt exact 9 paranteze. Grupăm termenii asemenea (cifra 3 și puterile lui 4):</p> $a = (3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3) \cdot (4^9 \cdot 4^8 \cdot \dots \cdot 4^1) a = 3^9 \cdot 4^{(9+8+\dots+1)}$	5 p
	<p>Calculăm suma exponenților (suma lui Gauss): <math>1 + 2 + \dots + 9 = 45</math></p> <p>Rezultă: <math>a = 3^9 \cdot 4^{45}</math></p> <p>Transformăm baza 4 în baza 2 (știm că <math>4 = 2^2</math>):</p> $a = 3^9 \cdot (2^2)^{45} = 3^9 \cdot 2^{90}$	5 p
	<p>Expresia inițială este: <math>b = 3 \cdot 2^{90} \cdot 81^2 \Leftrightarrow b = 3 \cdot 2^{90} \cdot (3^4)^2 \Leftrightarrow b = 3^9 \cdot 2^{90}</math></p>	5 p
	<p>Comparând formele finale: <math>a = 3^9 \cdot 2^{90}</math> și <math>b = 3^9 \cdot 2^{90}</math></p> <p>Deci <math>a = b</math>.</p>	2,5 p



## Subiectul II (22,5 puncte)

Suma a patru numere naturale este 1766. Al doilea număr se obține tăind prima cifră a primului, al treilea se obține tăind prima cifră a celui de-al doilea, iar al patrulea tăind prima cifră a celui de-al treilea. Determinați numerele.

## Soluție

S2	Conform enunțului, cele patru numere sunt: $\overline{abcd}$ , $\overline{bcd}$ , $\overline{cd}$ , $d$ . $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 1766 \Rightarrow 1000a + 200b + 30c + 4d = 1766$	5 p
	$a = 1 \Rightarrow 200b + 30c + 4d = 766$	5 p
	Căutăm cel mai mare $b$ astfel încât $200b$ să fie mai mic sau egal cu 766. Dacă $b = 3 \Rightarrow 200b = 600$ Dacă $b = 4 \Rightarrow 200b = 800$ (nu convine).	5 p
	Căutăm cel mai mare $c$ astfel încât $30c$ să fie mai mic sau egal cu 166. Dacă $c = 5 \Rightarrow 30c = 150 \Rightarrow 4d = 16 \Rightarrow d = 4$ (verifică egalitatea inițială). Dacă $c = 4 \Rightarrow 30c = 120 \Rightarrow 4d = 46$ (nu verifică egalitatea inițială).	5 p
	Reconstituim numerele: $\overline{abcd} = 1354$ , $\overline{bcd} = 354$ , $\overline{cd} = 54$ , $d = 4$	2,5 p

## Subiectul III (22,5 puncte)

a) Să se arate că:  $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2022} < 2^{2023}$

b) Să se scrie numărul  $2023^{2024}$  ca o sumă de 2023 de numere naturale consecutive.

## Soluție

S3 a	Notăm cu $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2022} \Rightarrow 2 \cdot S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2023}$ .	5 p
	Scădem cele două relații membru cu membru $\Rightarrow 2 \cdot S - S =$ $= (2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2023}) - (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2022}) = 2^{2023} - 2^0$ $S = 2^{2023} - 1 < 2^{2023}$	5 p



S3 b	$2023^{2024} = 2023^{2023} \cdot 2023 = 2023^{2023} + 2023^{2023} + \dots + 2023^{2023}$ (de 2023 de ori)	5 p
	$= (2023^{2023} - 1011) + (2023^{2023} - 1010) + \dots + (2023^{2023} - 1) + 2023^{2023} + (2023^{2023} + 1) + \dots + (2023^{2023} + 1010) + (2023^{2023} + 1011)$	7,5 p

#### Subiectul IV (22,5 puncte)

Se dau numerele  $a_1=4$ ,  $a_2=a_1+3 \cdot 4$ ,  $a_3=a_2+3 \cdot 4^2$ , ...,  $a_{99}=a_{98}+3 \cdot 4^{98}$ .

- Determinați  $a_5$ .
- Comparați  $a_{99}$  cu  $3^{132}$ .
- Arătați că  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{99} = 2^{9900}$

#### Soluție

S4 a)	$a_5 = a_4 + 3 \cdot 4^4 = a_3 + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^4 = a_2 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^4 = a_1 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^4 =$	3 p
	$= 4 + 3 \cdot (4 + 4^2 + 4^3 + 4^4) = 4 + (4-1) \cdot (4 + 4^2 + 4^3 + 4^4) = 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 - 4 - 4^2 - 4^3 - 4^4 = 4^5 \Rightarrow a_5 = 4^5 = 1024$	4 p
S4 b)	$a_{99} = 4 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + \dots + 3 \cdot 4^{98} = 4 + (4-1) \cdot (4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{98}) =$	3 p
	$= 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{99} - 4 - 4^2 - 4^3 - \dots - 4^{98} = 4^{99}$ $4^{99} = 2^{198} = (2^3)^{66} = 8^{66}$ , iar $3^{132} = (3^2)^{66} = 9^{66}$	4 p
	$\Rightarrow a_{99} < 3^{132}$	1 p
S4 c)	$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{99} = 4 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \dots \cdot 4^{99} =$	3 p
	$= 4^{1+2+3+\dots+99} = (2^2)^{99 \cdot 100 : 2} = 2^{9900}$	4,5 p